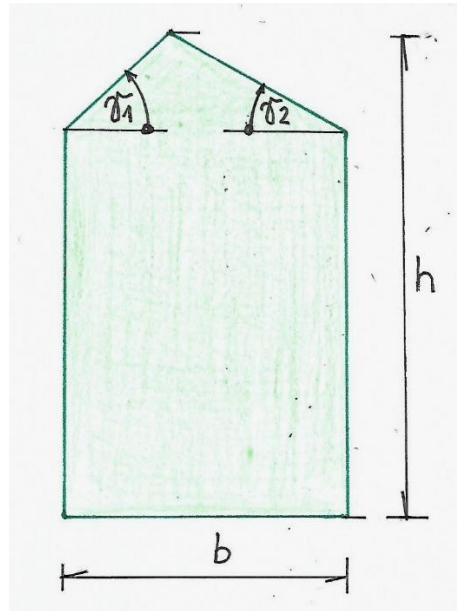


Egy megfaragott gerenda felhasználásáról – 2. rész

Dolgozatunk 1. részében egy egyszerűbb feladatot oldottunk meg – ld.: *)!

Az alábbiakban a következő keresztmetszet - alakú fagerendákkal dolgozunk – 1. ábra.



1. ábra

1. Feladat

Határozzuk meg, hogy a γ_1 és γ_2 szög alatt megfaragott gerenda milyen feltételek mellett alkalmas a φ_1 és φ_2 tetőhajlásokat megvalósító élszarufának!

Megoldás

Itt is támaszkodunk a **) korábbi dolgozatunkban közöltekre. Eszerint:

$$\underline{\underline{\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\sin \phi}{\operatorname{tg} \varepsilon_1}}}, \quad \underline{\underline{\operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{\sin \phi}{\operatorname{tg} \varepsilon_2}}} \rightarrow \underline{\underline{\frac{\operatorname{tg} \gamma_1}{\operatorname{tg} \gamma_2} = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon_2}{\operatorname{tg} \varepsilon_1}}}. \quad (1)$$

Majd:

$$\operatorname{tg} \phi = \sin \varepsilon_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = \sin \varepsilon_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2. \quad (2)$$

Azonossággal:

$$\sin \phi = \frac{\operatorname{tg} \phi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi}} = \frac{\sin \varepsilon_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1}{\sqrt{1 + (\sin \varepsilon_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1)^2}} = \frac{\sin \varepsilon_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2}{\sqrt{1 + (\sin \varepsilon_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2)^2}}. \quad (3)$$

Most (1) és (2) - vel:

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\sin \phi}{\operatorname{tg} \varepsilon_1} = \frac{1}{\operatorname{tg} \varepsilon_1} \cdot \frac{\sin \varepsilon_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1}{\sqrt{1 + (\sin \varepsilon_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1)^2}} = \frac{\cos \varepsilon_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1}{\sqrt{1 + (\sin \varepsilon_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1)^2}}, \quad (4/1)$$

$$\operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{\sin \phi}{\operatorname{tg} \varepsilon_2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \varepsilon_2} \cdot \frac{\sin \varepsilon_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2}{\sqrt{1 + (\sin \varepsilon_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2)^2}} = \frac{\cos \varepsilon_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2}{\sqrt{1 + (\sin \varepsilon_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2)^2}}. \quad (4/2)$$

Most (4/1) - et négyzetre emelve és rendezve:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma_1 &= \frac{\cos \varepsilon_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1}{\sqrt{1 + (\sin \varepsilon_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1)^2}} \rightarrow \operatorname{tg}^2 \gamma_1 = \frac{\cos^2 \varepsilon_1 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_1}{1 + \sin^2 \varepsilon_1 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_1} = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_1}{\frac{1}{\cos^2 \varepsilon_1} + \frac{\sin^2 \varepsilon_1 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_1}{\cos^2 \varepsilon_1}} \rightarrow \\ \operatorname{tg}^2 \gamma_1 &= \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon_1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon_1 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_1} = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon_1 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1)} \rightarrow \\ 1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon_1 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1) &= \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_1}{\operatorname{tg}^2 \gamma_1} \rightarrow \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_1}{\operatorname{tg}^2 \gamma_1} - 1 = \operatorname{tg}^2 \varepsilon_1 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1) \rightarrow \\ \operatorname{tg}^2 \varepsilon_1 &= \frac{\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_1}{\operatorname{tg}^2 \gamma_1} - 1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}. \end{aligned} \quad (5/1)$$

Indexcserével:

$$\operatorname{tg}^2 \varepsilon_2 = \frac{\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_2}{\operatorname{tg}^2 \gamma_2} - 1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_2}. \quad (5/2)$$

Majd (1/3) - ből:

$$\frac{\operatorname{tg} \varepsilon_2}{\operatorname{tg} \varepsilon_1} = \frac{\operatorname{tg} \gamma_1}{\operatorname{tg} \gamma_2} \rightarrow \frac{\operatorname{tg}^2 \varepsilon_2}{\operatorname{tg}^2 \varepsilon_1} = \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma_1}{\operatorname{tg}^2 \gamma_2}; \quad (6)$$

ezután (5/1), (5/2) és (6) - tal:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_2}{\operatorname{tg}^2 \gamma_2} - 1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_2} &= \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma_1}{\operatorname{tg}^2 \gamma_2} \rightarrow \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_2} \cdot \frac{\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_2}{\operatorname{tg}^2 \gamma_2} - 1}{\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_1}{\operatorname{tg}^2 \gamma_1} - 1} = \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma_1}{\operatorname{tg}^2 \gamma_2} \rightarrow \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_2} \cdot \frac{\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_2 - \operatorname{tg}^2 \gamma_2}{\operatorname{tg}^2 \gamma_2}}{\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_1 - \operatorname{tg}^2 \gamma_1}{\operatorname{tg}^2 \gamma_1}} = \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma_1}{\operatorname{tg}^2 \gamma_2} \rightarrow \\ \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_2} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_2 - \operatorname{tg}^2 \gamma_2}{\operatorname{tg}^2 \varphi_1 - \operatorname{tg}^2 \gamma_1} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma_1}{\operatorname{tg}^2 \gamma_2} &= \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma_1}{\operatorname{tg}^2 \gamma_2} \rightarrow \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_2 - \operatorname{tg}^2 \gamma_2}{\operatorname{tg}^2 \varphi_1 - \operatorname{tg}^2 \gamma_1} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_2}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1} \rightarrow \\ \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_2 - \operatorname{tg}^2 \gamma_2}{\operatorname{tg}^2 \varphi_1 - \operatorname{tg}^2 \gamma_1} &= \frac{\cos^2 \varphi_1}{\cos^2 \varphi_2} \rightarrow \sin^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_2 \cdot \operatorname{tg}^2 \gamma_2 = \sin^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1 \cdot \operatorname{tg}^2 \gamma_1 \rightarrow \\ 1 - \cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_2 \cdot \operatorname{tg}^2 \gamma_2 &= 1 - \cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1 \cdot \operatorname{tg}^2 \gamma_1 \rightarrow \\ \cos^2 \varphi_2 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \gamma_2) &= \cos^2 \varphi_1 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \gamma_1) \rightarrow \frac{\cos^2 \varphi_2}{\cos^2 \gamma_2} = \frac{\cos^2 \varphi_1}{\cos^2 \gamma_1} \rightarrow \\ \frac{\cos \varphi_2}{\cos \gamma_2} &= \frac{\cos \varphi_1}{\cos \gamma_1} \rightarrow \underline{\underline{\frac{\cos \gamma_1}{\cos \gamma_2} = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2}}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Tehát a (7) egyenlet teljesülése a (szükséges) feltétele annak, hogy a γ_1 és γ_2 szög alatt megfaragott gerenda alkalmas legyen egy φ_1 és φ_2 tetőhajlásokat megvalósító élszarufának.

2. Feladat

Egy γ_1 és γ_2 szög alatt megfaragott gerenda alkalmas a φ_1 és φ_2 tetőhajlásokat megvalósító élszarufának. Határozzuk meg, hogy mekkora lesz ekkor az ereszsarokban metsződő ereszek közbezárt – 180° - nál kisebb – szöge!

Megoldás

Kiindulunk az (5 / 1) egyenletből:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \varepsilon_1 &= \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_1 - 1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1} = \cos^2 \varphi_1 \cdot \left(\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_1}{\operatorname{tg}^2 \gamma_1} - 1 \right) = \frac{\sin^2 \varphi_1}{\operatorname{tg}^2 \gamma_1} - \cos^2 \varphi_1 = \frac{\sin^2 \varphi_1}{\operatorname{tg}^2 \gamma_1} - (1 - \sin^2 \varphi_1), \\ \operatorname{tg}^2 \varepsilon_1 &= \sin^2 \varphi_1 \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \gamma_1} + 1 \right) - 1 = \sin^2 \varphi_1 \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma_1}{\operatorname{tg}^2 \gamma_1} - 1 \rightarrow \\ 1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon_1 &= \frac{\sin^2 \varphi_1}{\sin^2 \gamma_1} \rightarrow \frac{1}{\cos^2 \varepsilon_1} = \frac{\sin^2 \varphi_1}{\sin^2 \gamma_1} \rightarrow \cos^2 \varepsilon_1 = \frac{\sin^2 \gamma_1}{\sin^2 \varphi_1} \rightarrow \cos \varepsilon_1 = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \varphi_1}, \text{ tehát:} \\ \cos \varepsilon_1 &= \frac{\sin \gamma_1}{\sin \varphi_1} \rightarrow \underline{\varepsilon_1 = \arccos \left(\frac{\sin \gamma_1}{\sin \varphi_1} \right)}. \quad (8 / 1) \end{aligned}$$

Indexcserével:

$$\cos \varepsilon_2 = \frac{\sin \gamma_2}{\sin \varphi_2} \rightarrow \underline{\varepsilon_2 = \arccos \left(\frac{\sin \gamma_2}{\sin \varphi_2} \right)}. \quad (8 / 2)$$

Majd:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \arccos \left(\frac{\sin \gamma_1}{\sin \varphi_1} \right) + \arccos \left(\frac{\sin \gamma_2}{\sin \varphi_2} \right), \text{ tehát:} \\ \underline{\underline{\varepsilon &= \arccos \left(\frac{\sin \gamma_1}{\sin \varphi_1} \right) + \arccos \left(\frac{\sin \gamma_2}{\sin \varphi_2} \right)}}. \quad (9) \end{aligned}$$

Tehát a γ_1 és γ_2 szög alatt megfaragott gerenda esetén, amely egy φ_1 és φ_2 tetőhajlásokat megvalósító élszarufa, az ereszsarokban metsződő ereszek közbezárt – 180° - nál kisebb – szögét a (9) képlet adja meg.

Megjegyzések:

M1. A (8) képletekről leolvasható, hogy:

$$\cos \varepsilon_i = \frac{\sin \gamma_i}{\sin \varphi_i} < 1 \rightarrow \sin \gamma_i < \sin \varphi_i \rightarrow \underline{\gamma_i < \varphi_i}, \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

M2. Most lássuk képleteinket egy számpéldában működni!

SZÁMPÉLDA

Adatok:

$$\varepsilon = 120^\circ; \varphi_1 = 60^\circ; \varphi_2 = 45^\circ. \quad (A)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon + \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2}} = \frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ + \frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ}} = 0,7029137098 \rightarrow \underline{\varepsilon_1 = 35,10390936^\circ}. \quad (a)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1 = 120^\circ - 35,10390936^\circ = 84,89609064^\circ, \text{ tehát:}$$

$$\underline{\varepsilon_2 = 84,89609064^\circ}. \quad (b)$$

$$\operatorname{tg} \phi = \sin \varepsilon_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = \sin \varepsilon_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 \rightarrow$$

$$\operatorname{tg} \phi = \sin \varepsilon_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = \sin 35,10390936^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 0,9960349977 ;$$

$$\operatorname{tg} \phi = \sin \varepsilon_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 = \sin 84,89609064^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = 0,9960349977 ;$$

$$\underline{\phi = 44,88618556^\circ}. \quad (c)$$

$$\sin \phi = \sin 44,88618556^\circ = 0,7057007641 ;$$

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\sin \phi}{\operatorname{tg} \varepsilon_1} = \frac{0,7057007641}{0,7029137098} = 1,003965002 \rightarrow \underline{\gamma_1 = 45,11336405^\circ}. \quad (d)$$

$$\operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{\sin \phi}{\operatorname{tg} \varepsilon_2} = \frac{\sin 44,88618556^\circ}{\operatorname{tg} 84,89609064^\circ} = 0,06303064994 \rightarrow \underline{\gamma_2 = 3,60661907^\circ}. \quad (e)$$

A megfelelés vizsgálata:

$$\frac{\cos \gamma_1}{\cos \gamma_2} = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} \rightarrow \frac{\cos \gamma_1}{\cos \gamma_2} = \frac{\cos 45,11336405^\circ}{\cos 3,60661907^\circ} = 0,7071067812, \quad (f1)$$

$$\rightarrow \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 45^\circ} = 0,7071067812, \quad (f2)$$

tehát a megfelelés feltétele numerikusan is pontosan teljesül.

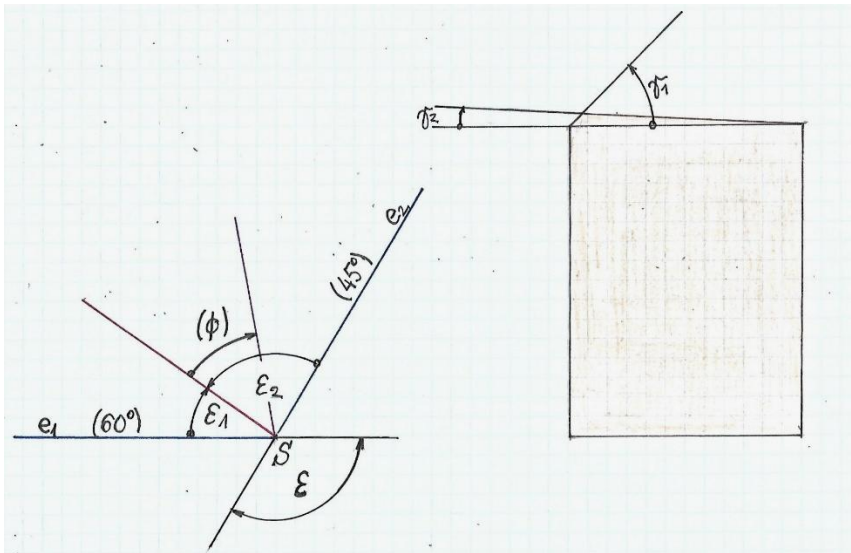
(Ezért a sok tizedesjeggyel való munka.)

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \arccos\left(\frac{\sin \gamma_1}{\sin \varphi_1}\right) + \arccos\left(\frac{\sin \gamma_2}{\sin \varphi_2}\right) = \\ &= \arccos\left(\frac{\sin 45,11336405^\circ}{\sin 60^\circ}\right) + \arccos\left(\frac{\sin 3,60661907^\circ}{\sin 45^\circ}\right) = 120^\circ, \text{ tehát:} \end{aligned}$$

$$\underline{\varepsilon = 120^\circ}. \quad (g)$$

Visszakaptuk a bemenő adatot, tehát számításunk helyes.

Az (A), (a), (b), (c), (d) és (e) szerinti eredményvázlat a 2. ábrán látható.



2. ábra

Itt (ϕ) az élgerinc ereszsíkba forgatott hajlásszöge.

Elég szokatlan / sajátos lett az elrendezés, de ezt adták az eredmények; pedig a bemenő adatok nem is annyira szokatlanok. A furcsa eredményért a „felelős”: a közel derékszögű ϵ_2 szög. A számítással kapott eredményeket szerkesztéssel ellenőriztük: rendben vannak.

M3. Enyhén szólva meglepő a (7) kapcsolat. Ez inkább csak gyors ellenőrzésre való: jó - e a gerenda megfaragása céljainknak. Tegyük néhány próbát!

$$1.) \text{ Legyen: } \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi \rightarrow \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \leftarrow \frac{\cos \gamma_1}{\cos \gamma_2} = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} !$$

$$\epsilon = \arccos\left(\frac{\sin \gamma_1}{\sin \varphi_1}\right) + \arccos\left(\frac{\sin \gamma_2}{\sin \varphi_2}\right) = 2 \cdot \arccos\left(\frac{\sin \gamma}{\sin \varphi}\right) \rightarrow \epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon}{2} = \arccos\left(\frac{\sin \gamma}{\sin \varphi}\right) ;$$

továbbá adatfelvétellel:

$$\epsilon = 120^\circ \rightarrow \frac{\epsilon}{2} = 60^\circ = \arccos\left(\frac{\sin \gamma}{\sin \varphi}\right) \rightarrow \cos 60^\circ = \frac{\sin \gamma}{\sin \varphi} = \frac{1}{2} \rightarrow \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot \sin \varphi \rightarrow$$

és megint adatfelvétellel:

$$\varphi = 45^\circ \rightarrow \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \underline{\gamma} = \arcsin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \underline{20,70^\circ}.$$

Arra jutottunk, hogy egyenlően 45° - os tetőhajlások és 120° - os ereszsarok - szög esetén a megfaragási szögek is egyenlők, és $20,7^\circ$ - osak.

Ennek a feladatnak az (is) egy megszívlelendő a tanulsága, hogy (7) szükséges, de nem elégséges döntési feltétel. Utóbbit (10) szolgáltatja.

2.) Határozzuk meg, hogy 45° - os megfaragási szögekkel milyen kontyvetők élgerincei valósíthatók meg!

Ekkor: $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 45^\circ \rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$;

$$\varepsilon = 2 \cdot \arccos\left(\frac{\sin \gamma}{\sin \varphi}\right) \rightarrow \varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon}{2} = \arccos\left(\frac{\sin \gamma}{\sin \varphi}\right) = \arccos\left(\frac{\sin 45^\circ}{\sin \varphi}\right) ;$$

$$\cos \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin \varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sin \varphi} \rightarrow \underline{\cos \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}} . \quad (11)$$

Tehát olyan kontyvetők élgerincei valósíthatók meg 45° - os megfaragási szögekkel, amelyek kielégítik a (11) egyenletet.

Például: $\varepsilon = 90^\circ \rightarrow \frac{\varepsilon}{2} = 45^\circ \rightarrow \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, így (h) - val is:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \sin \varphi = 1 \rightarrow \underline{\varphi = 90^\circ} ; \quad (h)$$

ez a hajlás azonban már nem tetőhöz, inkább falhoz tartozik, így ez nem valósítható meg. Tanulság: 45° - os megfaragási szögekkel és derékszögű ereszsarokkal tető nem építhető; illetve, ha mégis, az hagyományosan nem nevezhető tetőnek.

3.) Határozzuk meg, hogy azonos tetőhajlásokkal, derékszögű ereszsarokkal milyen kontyvetők – illetve ezek élszarufái – építhetők meg!

Az előzők alapján:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi \rightarrow \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \rightarrow \varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon}{2} = \arccos\left(\frac{\sin \gamma}{\sin \varphi}\right) \rightarrow \cos \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sin \gamma}{\sin \varphi} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sin \gamma}{\sin \varphi} \rightarrow \sin \gamma = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{2}} \rightarrow \underline{\gamma = \arcsin\left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{2}}\right)} , \quad 0^\circ < \varphi < 90^\circ . \quad (12)$$

Tehát: azonos tetőhajlásokkal, derékszögű ereszsarokkal olyan kontyvetők – illetve ezek élszarufái – építhetők meg, amelyekre – (i) szerint – a megfaragási szög kisebb 45° - nál.

4.) Írjuk le egyetlen képlettel γ_1 és γ_2 függését φ_1 , φ_2 és ε - tól!

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon + \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2}} \rightarrow \varepsilon_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon + \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2}}\right) ;$$

$$\cos \varepsilon_1 = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \varphi_1} \rightarrow \sin \gamma_1 = \sin \varphi_1 \cdot \cos \varepsilon_1 = \sin \varphi_1 \cdot \cos \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon + \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2}}\right) \right] \rightarrow$$

$$\underline{\gamma_1 = \arcsin \left\{ \sin \varphi_1 \cdot \cos \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon + \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2}} \right) \right] \right\}} ; \quad (13 / 1)$$

indexcserével:

$$\underline{\gamma_2 = \arcsin \left\{ \sin \varphi_2 \cdot \cos \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon + \frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1}} \right) \right] \right\}} . \quad (13 / 2)$$

Most nézzük, hogyan működnek e képletek, ismét az (A) adatokkal dolgozva!

SZÁMPÉLDA

Adatok:

$$\varepsilon = 120^\circ ; \varphi_1 = 60^\circ ; \varphi_2 = 45^\circ . \quad (A)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \arcsin \left\{ \sin \varphi_1 \cdot \cos \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon + \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2}} \right) \right] \right\} = \\ &= \arcsin \left\{ \sin 60^\circ \cdot \cos \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ + \frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ}} \right) \right] \right\} = 45,11336405^\circ , \text{ tehát:} \\ \underline{\gamma_1} &= 45,11336405^\circ ; \end{aligned} \quad (i)$$

hasonlóan:

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \arcsin \left\{ \sin \varphi_2 \cdot \cos \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon + \frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1}} \right) \right] \right\} = \\ &= \arcsin \left\{ \sin 45^\circ \cdot \cos \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ + \frac{\operatorname{tg} 45^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ}} \right) \right] \right\} = 3,60661907^\circ , \text{ tehát:} \\ \underline{\gamma_2} &= 3,60661907^\circ . \end{aligned} \quad (j)$$

Örömmel állapítjuk meg, hogy a (d) és (e), valamint a (i) és (j) eredmények meg - egyeznek, minden kiírt számjegyre. (Aki nem hiszi, járjon utána!)

A (13) képletek első pillantásra ijesztőek lehetnek; azonban az, hogy nem kell a sok tizedesjegynyi számot sokszor beírni, feledteti a kezdeti idegenkedést. A tudományos kalkulátorok még bírják ezt az adatmennyiséget; mi is azzal dolgoztunk.

M4. **) írásunkban az élgerinc hajlásszögét φ - vel jelöltük; ez itt ϕ - re változott.

M5. A vágák és az élek közti rokonságot itt is felhasználhatjuk.

M6. Ebben a dolgozatban felállítottuk, hogy mik az élszarufák megfaragásának a szükséges és elégséges feltételei. E képletek szépek, egyszerűek és könnyen alkalmazhatóak.

Ajánlott olvasmányok:

*) [Egy megfaragott gerenda felhasználásáról 1.pdf](#)

**)

<https://www.galgoczi.net/anyagok/Az%20otszog%20keresztmetszetu%20elszarufa%20keresztmetszetenek%20kialakitasarol.pdf>

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnöktanár

Szódliget, 2025. 03. 19.

Továbbiak: www.galgoczi.net